数値計算と誤差

誤差が生じる原因

① 誤差が生じる原因で分類すると、次のようになる。

❶ 過失誤差
❷ 系統誤差
❸ 偶然誤差

② 過失誤差

数値の読み違いや測定器の誤差、
操作ミスなど数学的に意味のない誤差である。

③ 系統誤差

ある一定の規則や原因によって生じる誤差である。

④ 偶然誤差

統計的に全く偶然に起こる誤差、
ガウスの誤差分布法則に従っていて
原則的には除去できない誤差である。

解析誤差

① 解析誤差

❶ 現象を数式化するときの手法の
差異で生じる誤差である。
❷ 数値計算の方法(アルゴリズム)の
差異で生じる誤差である。
❸ 近似公式の使い方の差異で生じる誤差である。
❹ 適切なモデルや計算公式を工夫すれば、
ある程度回避できる。

② 公式誤差

近似式や関数近似の使い方の違いによる誤差

③ 算法誤差

アルゴリズムやモデル選定が
不適当なために生じる誤差である。

演算誤差

① 打ち切り誤差

❶ 数値計算を途中で打ち切るために生じる誤差である。

❷ 数学的に正確な関数値をf(x)、有限回の演算操作で近似した関数値をfa(x)とすると、f(x)－fa(x)を打ち切り誤差という。

❸ 無限級数の部分和で
展開されている近似公式を使うとき、
定積分の値を数値積分の台形公式や
シンプソンの公式で近似するとき、
微分方程式を差分方程式に
置き換えて解くときなどに問題になる。

② 変換誤差

１０進数を２進数に変換するときに生じる誤差である。

③ 内在誤差(データ誤差)

データ本来が既にもっている誤差である。

④ 丸めの誤差

❶ 入力データとして有限桁の数値を使うとき、
または数値計算の結果を意味のある有効桁に
丸めるときに生じる誤差である。

❷ 丸め誤差は各段階で小さくても、
計算を反復して行くにつれて次第に累積し、
大きな誤差になることがある。

相対誤差

① 観察や実験によって得られる測定値は、
ある限られた桁までしか意味を持たない近似値である。

② ある測定値の真値Mの近似値をmとするとき、
次の式が成り立つ。

$\varepsilon = m - M$ あるいは $M = m - \varepsilon$

③ εを近似値mの誤差という。

④ |ε|を絶対誤差という。

⑤ 近似値の誤差と真値との比をを相対誤差という。

$$\varepsilon r = \varepsilon / M$$

⑥ 一般には真値Mは知ることはできないから
近似値mをMの代わりに使用して

$$\varepsilon r = \varepsilon / m$$

を相対誤差という。

誤差の限界

① 誤差の限界

ある小さな任意の正数をαとするとき、

$|\varepsilon| \leqq \alpha$

となるようなαの値を誤差限界という。

② 誤差のとりうる範囲を

あらかじめ指定しておきたいときに使う。

③　誤差限界 α と近似値mとの比

α/m　を相対誤差の限界という。

④　真値Mは未知の量であって
正確に知ることは原理的にできない。

⑤　誤差の限界 α がわかっていれば、
この α を十分小さくとることによって、

$$m-\alpha \leqq M \leqq m+\alpha$$

から真値Mに十分近い値として知ることができる。

有効数字

① 量を表す数値はすべて誤差を含んでいるから
普通、数値は小数部分をもった実数の形で表される。

② このとき下位の桁ほど
誤差のために不確かになるから、
その部分を適当な方法で処理する。

③ そのとき残った意味のある数値を有効数字という。

④ その意味のある数値の桁数を有効桁数という。

⑤ 数値計算では
有効数字の桁数の多い数値ほど
精密な近似値である。

⑥ 真値Mの近似値mの精度は
真値に対する誤差|ε|の割合で表される。

⑦ 相対誤差|ε|の逆数pを精度と定義する。

⑧ コンピュータでは
数値の精度を有効数字の桁数で表すことが多い。

⑨　実際の数値計算では
数値の有効桁数が多いほど
その近似値は真値に近く正確である。

⑩　桁数が多いと計算が面倒になり、
計算時間も長くなるから
下位の桁を適当に省略する。