

# 論理演算の基礎

# 論理演算とは

- ① 論理変数は  
真または偽のいずれかの値をとる変数である。
- ② 論理演算は、2つ以上の論理変数の間で行われる演算
  - ① 論理和
  - ② 論理積
  - ③ 排他的論理和など
- ③ 論理定数は、真または偽のことである。

# 論理を展開する手法

- ① 論理公式
- ② 真理値表
- ③ ベン図
- ④ ベッチ・カルノー図

# 論理演算を表す論理演算子

| 論理演算   | 論理演算子                               |
|--------|-------------------------------------|
| 論理和    | $\vee$ または $+$                      |
| 論理積    | $\wedge$ または $\cdot$                |
| 排他的論理和 | $\veebar$ または $\dot{\wedge}$        |
| 論理否定   | $\neg$ または $\overline{\phantom{x}}$ |

# 真理値表とは

## ① 真理値表

- ① コンピュータの基本演算である  
否定、論理和、論理積、排他的論理和などの  
論理演算の結果を表形式で表したものである。
- ② 論理変数について、  
真偽のすべての組合せを考え、  
それぞれの組合せに対して、  
論理演算結果を求め、表にまとめたものである。

# 真理値表の具体例

| A | B | $\neg A$ | $A \vee B$ | $A \wedge B$ | $A \vee B$ |
|---|---|----------|------------|--------------|------------|
| 0 | 0 | 1        | 0          | 0            | 0          |
| 0 | 1 | 1        | 1          | 0            | 1          |
| 1 | 0 | 0        | 1          | 0            | 1          |
| 1 | 1 | 0        | 1          | 1            | 0          |

# 演算子間の優先順位

## ① 演算子の優先順位

① 括弧

② 算術演算子

(べき乗、積・商、和・差)

③ 論理演算子

(論理否定、論理積、論理和、排他的論理和)

② 同じ優先順位の場合は、左側から先に実行する。

# 論理公式

- ① 論理式は  
与えられた条件から正しいか誤りであるかを評価し、  
結果を返す式のことである。
- ② 論理式には、比較演算子や論理演算子が使われる。
- ③ 論理公式は、論理演算子を使用して、  
集合と集合の演算あるいは  
集合に関する法則を示したものである。



# 主要な論理公式

## ① べき等則

$$A \vee A = A$$

$$A \wedge A = A$$

$$A \vee 0 = A$$

## ② 交換則

$$A \vee B = B \vee A$$

$$A \wedge B = B \wedge A$$

## ③ 分配則

$$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

$$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

#### ④ 吸収則

$$A \vee (A \wedge B) = A$$

$$A \vee (A \wedge B) = A \vee B$$

$$A \wedge (A \vee B) = A$$

$$A \wedge (A \vee B) = A \wedge B$$

#### ⑤ 復元則

$$\neg \neg A = A$$

#### ⑥ 重要な論理公式

$$A \vee 1 = 1$$

$$A \wedge 1 = A$$

$$A \vee 0 = A$$

$$A \wedge 0 = 0$$

$$A \vee A = 1$$

$$A \wedge A = 0$$

# ド・モルガンの法則とその証明

真理値表を使用してド・モルガンの法則の  
 $\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$  を証明する。

| A | B | $A \vee B$ | $\neg(A \vee B)$ | $\neg A$ | $\neg B$ | $\neg A \wedge \neg B$ |
|---|---|------------|------------------|----------|----------|------------------------|
| 0 | 0 | 0          | 1                | 1        | 1        | 1                      |
| 0 | 1 | 1          | 0                | 1        | 0        | 0                      |
| 1 | 0 | 1          | 0                | 0        | 1        | 0                      |
| 1 | 1 | 1          | 0                | 0        | 0        | 0                      |

## ① 前ページの真理値表において

- ①  $\neg(A \vee B)$ のビットパターン1000
- ②  $\neg A \wedge \neg B$ のビットパターン1000
- ③ ①と②のビットパターンが一致する。

② 2つの論理変数A、Bの論理和の否定は、  
論理変数A、Bのそれぞれの否定の論理積に等しい。

③  $\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$  についても  
次の真理値表を使用して証明できる。

| A | B | $A \wedge B$ | $\neg(A \wedge B)$ | $\neg A$ | $\neg B$ | $\neg A \vee \neg B$ |
|---|---|--------------|--------------------|----------|----------|----------------------|
| 0 | 0 | 0            | 1                  | 1        | 1        | 1                    |
| 0 | 1 | 0            | 1                  | 1        | 0        | 1                    |
| 1 | 0 | 0            | 1                  | 0        | 1        | 1                    |
| 1 | 1 | 1            | 0                  | 0        | 0        | 0                    |

# 双対の原理

## ① 双対

二つの論理式で、一方が他方の全ての

① 論理積を論理和で、論理和を論理積で、

② 0を1で、1を0で

置換した表現であるとき、

両者の論理式は互いに双対であるという。

## ② 双対の原理

互いに双対な論理式は、

一方が成立すると他方も成立する。

# 双対の原理の具体例

①  $A \vee 0 = A$  と  $A \wedge 1 = A$

②  $A \vee 1 = 1$  と  $A \wedge 0 = 0$

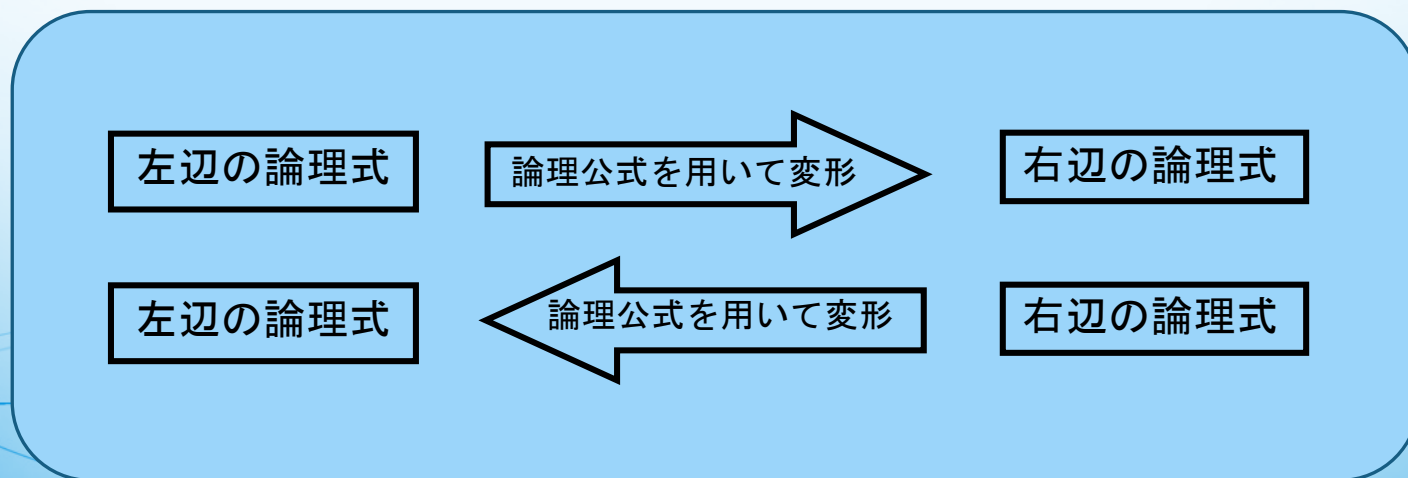
③  $A \vee A = A$  と  $A \wedge A = A$

④  $A \vee B = B \vee A$  と  $A \wedge B = B \wedge A$

⑤  $A \vee A \wedge B = A$  と  $A \wedge (A \vee B) = A$

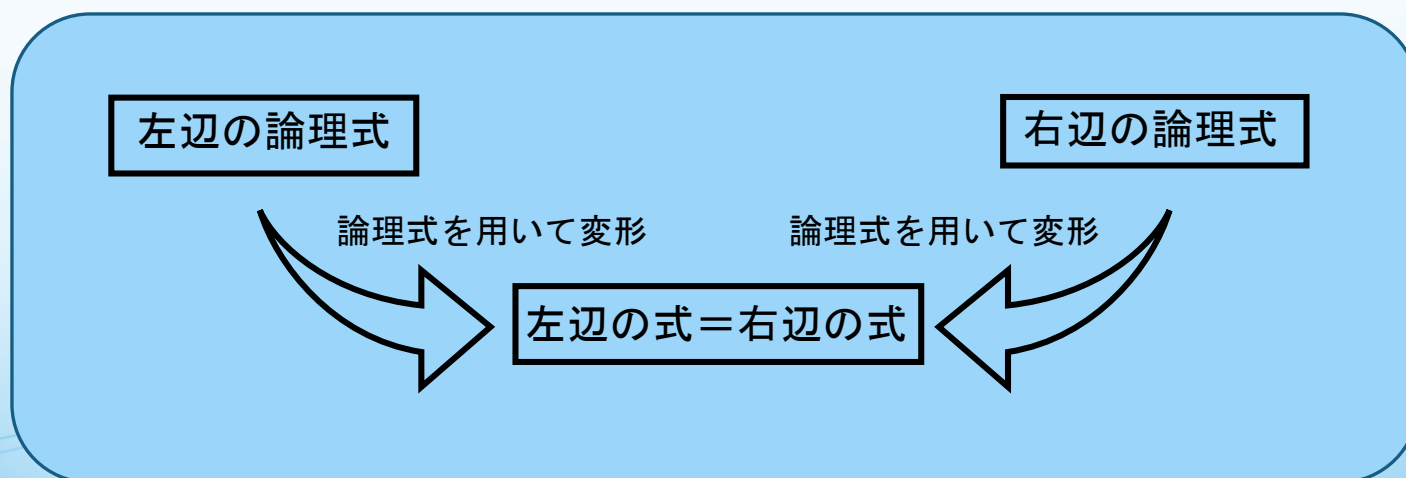
# 論理公式を利用した論理式の証明

- ① 左辺の論理式または右辺の論理式を  
論理公式を用いて変形し、  
右辺の論理式または左辺の論理式を導く。





- ② 左辺、右辺の論理式を  
論理式を用いて共に変形し、  
左辺＝右辺を求める。



# 具体例問題1

## 問題

次の論理式を証明する。

$$A \cdot B + A \cdot C + A \cdot \neg B \cdot \neg C = A$$

## 解答

- ① 3つの論理式を論理変数Aで括る。
- ②  $C + \neg C \cdot \neg B = C + \neg B$ を用いて、  
 $B + C + \neg B \cdot \neg C = B + C + \neg B$ に置換する。
- ③  $B + \neg B = 1$ を用いて、  
 $B + C + \neg B = 1 + C$ に置換する。
- ④  $1 + C = 1$ を用いて、 $A \cdot (1 + C) = A \cdot 1$ に置換する。
- ⑤  $A \cdot 1 = 1$ を用いて、 $A \cdot 1 = 1$ に置換する。

## ⑥ 論理公式を利用

$A \cdot B + A \cdot C + A \cdot \neg B \cdot \neg C$ を論理公式を用いて変形し、  
右辺の論理式Aになることを証明しているケースである。

## ⑦ 式の変形

$$\begin{aligned} & A \cdot B + A \cdot C + A \cdot \neg B \cdot \neg C \\ &= A \cdot (B + C + \neg B \cdot \neg C) [C + \neg C \cdot \neg B = C + \neg B] \\ &= A \cdot (B + (C + \neg B)) \\ &= A \cdot (B + C + \neg B) [B + \neg B = 1] \\ &= A \cdot (1 + C) [1 + C = 1] \\ &= A [A \cdot 1 = 1] \end{aligned}$$

# 具体例問題2

## 問題

次の論理式を証明する。

$$(A + B) \cdot (B + C) \cdot (C + \neg A) = (A + B) \cdot (C + \neg A)$$

## 解答

- ① 左辺の式の括弧を外すため、各項の論理積を求める。

$$A \cdot C \cdot C = A \cdot C, B \cdot C + B \cdot C = B \cdot C$$

$$A \cdot B \cdot \neg A = 0, A \cdot C \cdot \neg A = 0$$

- ②  $BC(A + \neg A) = BC$ 、 $BC + BC = BC$   
を利用して変形する。

- ③ 右辺の式の括弧を外すため、  
各項の論理積を求める。

$$A \cdot \neg A = 0$$

④ 左辺=右辺が得られる。

⑤ 式の変形

$$\begin{aligned}\textcircled{1} \text{ 左辺} &= (A+B) \cdot (B+C) \cdot (C+\neg A) \\ &= (A \cdot B + A \cdot C + B + B \cdot C) \cdot (C+\neg A) \\ &= A \cdot B \cdot C + A \cdot C + B \cdot C + \neg A \cdot B + \neg A \cdot B \cdot C \\ &\hspace{15em} [BC(A+\neg A)=BC] \\ &= B \cdot C + A \cdot C + \neg A \cdot B \hspace{1em} [BC+BC=BC]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\textcircled{2} \text{ 右辺} &= A \cdot C + A \cdot \neg A + B \cdot C + B \cdot \neg A \\ &= A \cdot C + B \cdot C + B \cdot \neg A\end{aligned}$$

③ 左辺=右辺

# 具体例問題3

## 問題

次の論理式を証明する。

$$(A + B) \cdot (A + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$$

## 解答

- ① 左辺の式の括弧を外すため、各項の論理積を求める。

$$A \cdot \neg A = 0$$



- ② 右辺の式を $B=B \cdot (B+C)$ 、 $C=C \cdot (C+B)$   
を利用して変形する。
- ③ 括弧を外すため、各項の論理積を求める。
- ④  $B \cdot B=1$ 、 $C \cdot C=1$ を利用して変形する。
- ⑤ 第2項と第4項を $B \cdot C$ で括って、  
 $A + \neg A=1$ を利用して変形する。
- ⑥ 左辺＝右辺が得られる。

## ⑦ 式の変形

$$\begin{aligned}\textcircled{1} \text{ 左辺} &= (A+B) \cdot (\neg A+C) \\ &= A \cdot \neg A + A \cdot C + B \cdot \neg A + B \cdot C \\ &= A \cdot C + B \cdot \neg A + B \cdot C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\textcircled{2} \text{ 右辺} &= (\neg A \cdot B) + (A \cdot C) \\ &= (\neg A \cdot B) \cdot (B+C) + (A \cdot C) \cdot (C+B) \\ &= \neg A \cdot B \cdot B + \neg A \cdot B \cdot C + A \cdot C \cdot C + A \cdot C \cdot B \\ &= \neg A \cdot B + \neg A \cdot B \cdot C + A \cdot C + A \cdot C \cdot B \\ &= \neg A \cdot B + B \cdot C \cdot (\neg A + A) + A \cdot C \\ &= \neg A \cdot B + B \cdot C + A \cdot C\end{aligned}$$

$$\textcircled{3} \text{ 左辺} = \text{右辺}$$